Praktikumsbericht zum studienbegleitenden Praktikum im Sommersemester 2019, Fach Mathematik

zu Händen von Prof. Dr. Thomas Weth

Name
Matrikelnummer
E-Mail

Praktikumsschule: Martin-Behaim-Gymnasium Nürnberg

Betreuende Lehrkraft: Frau Katrin Schaller

I. **Unterrichtsversuch 1: 10. Klasse – Einführung des algebraischen Nachweises der Symmetrie von Funktionsgraphen**
II. **Unterrichtsversuch 2: 11. Klasse – Einführung der Modellierung von Sachsituationen mithilfe von ganzrationalen Funktionen**

Inhalt

I. Unterrichtsversuch 1: 10. Klasse – Einführung des algebraischen Nachweises der Symmetrie von Funktionsgraphen

1. Sachstruktur

Die algebraische Überprüfung der Symmetrie eines Funktionsgraphen ist ein Teilbereich der Kurvendiskussion und dient dem Untersuchen und Beschreiben von Funktionen und ihren Graphen. Allgemein wird zwischen vier verschiedenen Symmetriearten unterschieden. Funktionsgraphen können achsensymmetrisch, punktsymmetrisch, verschiebungssymmetrisch und schubspiegelungssymmetrisch sein. Die Prüfung eines Funktionsgraphen auf Symmetrie kann rein graphisch nur auf einem Teilintervall und nie für die gesamte Funktion erfolgen. Im Folgenden soll daher der algebraische Nachweis der Achsen- und Punktsymmetrie näher betrachtet werden.

<u>Achsensymmetrie eines Funktionsgraphen</u>

Ein Funktionsgraph heißt achsensymmetrisch, wenn er durch eine Spieglung an einer Parallelen zur y-Achse, nämlich seiner Symmetrieachse, auf sich selbst abgebildet wird. Die Achsensymmetrie eines Funktionsgraphen lässt sich rechnerisch anhand des Funktionsterms nachweisen.

Der Graph einer Funktion f mit Definitionsbereich ID heißt achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = x_0$ genau dann, wenn für alle $x \in$ ID gilt:
$2x_0 - x \in$ ID und $f(x) = f(2x_0 - x)$ (Wittmann & Padberg, 2007).

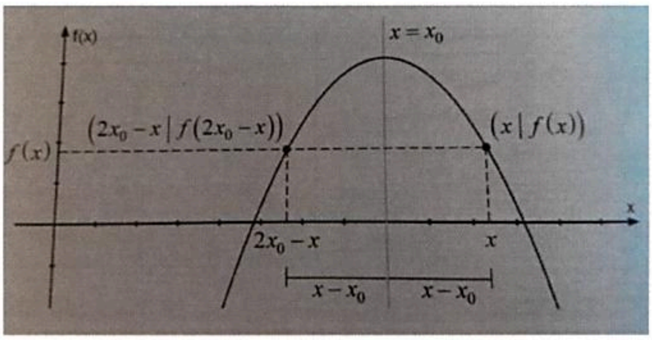


Abb. 1: Achsensymmetrie eines Funktionsgraphen zu einer beliebigen Achse (Wittmann & Padberg, 2007)

Beweis: Die beiden Punkte $(x|f(x))$ und $(2x_0 - x|f(x))$ haben jeweils den Abstand $x - x_0$ zur Geraden mit der Gleichung $x = x_0$ (s. Abb. 1), sind also symmetrisch bezüglich dieser. Deshalb ist der Graph von f achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = x_0$ genau dann, wenn für jeden Punkt $(x|f(x))$ auch der Punkt $(2x_0 - x|f(x))$ zum Graphen gehört. Dies ist gleichbedeutend mit $f(x) = f(2x_0 - x)$ für alle $x \in$ ID (Wittmann, G., & Padberg, F., 2007).

In der Schule wird primär der einfache Fall „Achsensymmetrie zur y-Achse" betrachtet. Der Graph einer Funktion f mit Definitionsbereich ID ist achsensymmetrisch zur y-Achse genau dann, wenn für alle $x \in$ ID gilt:
$-x \in$ ID und $f(-x) = f(x)$ (Wittmann & Padberg, 2007).

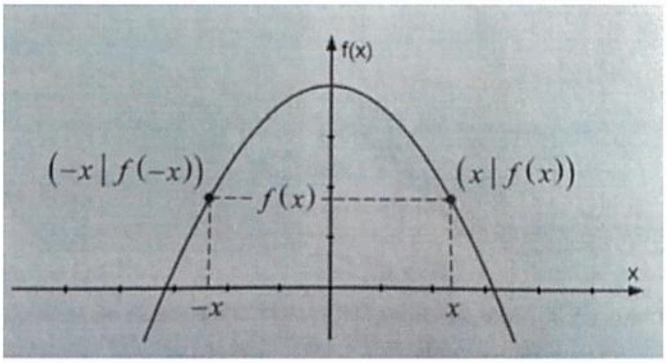


Abb. 2: Achsensymmetrie eines Funktionsgraphen zur y-Achse (Wittmann & Padberg, 2007)

Beweis: Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse genau dann, wenn für jeden Punkt $(x|f(x))$ auch der Punkt $(-x|f(x))$ zum Graphen gehört. Dies ist gleichbedeutend mit $f(-x) = f(x)$ für alle x ∈ ID (Wittmann & Padberg, 2007).

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2$. Ist der Graph von f achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse?

$f(-x) = 3(-x)^4 + 5(-x)^2 + 2 = 3x^4 + 5x^2 + 2 = f(x)$

Da $f(-x) = f(x)$ gilt, ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse. Siehe Abb. 3 für den Graphen der Funktion f.

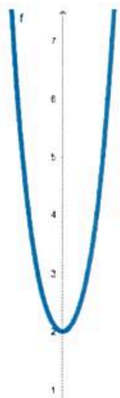


Abb. 3: Graph der Funktion f (Eigene Darstellung)

Punktsymmetrie eines Funktionsgraphen

Ein Funktionsgraph heißt punktsymmetrisch, wenn es eine Punktspiegelung gibt, die den Funktionsgraphen auf sich selbst abbildet. Die Punktsymmetrie eines Funktionsgraphen lässt sich rechnerisch anhand des Funktionsterms nachweisen.

Der Graph einer Funktion f mit Definitionsbereich ID heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(x_0|y_0)$ genau dann, wenn für alle $x \in$ ID gilt:
$2x_0 - x \in$ ID und $f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$ (Wittmann & Padberg, 2007).

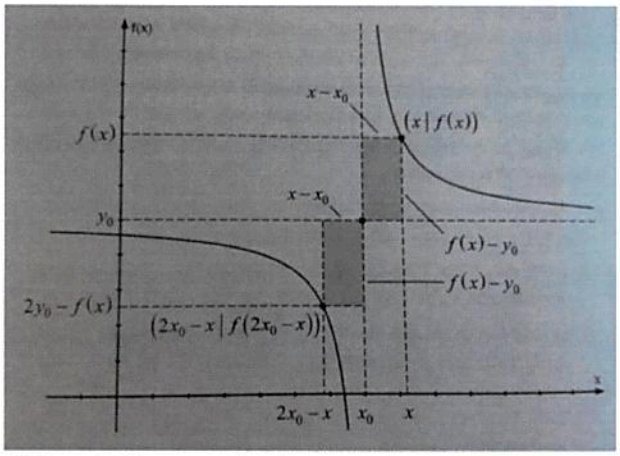


Abb. 4: Punktsymmetrie eines Funktionsgraphen zu einem beliebigen Punkt (Wittmann & Padberg, 2007)

Beweis: Wie aus Abb. 4 ersichtlich ist, haben die beiden Punkte $(x|f(x))$ und $(2x_0 - x|2y_0 - f(x))$ jeweils den Abstand $x - x_0$ zur Geraden mit der Gleichung $x = x_0$ und den Abstand $f(x) - y_0$ zur Geraden mit der Gleichung $y = y_0$, sind also symmetrisch bezüglich des Punktes $(x_0|y_0)$. Der Graph von f ist deshalb symmetrisch zu diesem Punkt genau dann, wenn für jeden Punkt $(x|f(x))$ auch der Punkt $(2x_0 - x|2y_0 - f(x))$ zum Graphen gehört. Dies ist gleichbedeutend mit dem zu zeigenden Kriterium $f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$ für alle $x \in$ ID (Wittmann & Padberg, 2007).

In der Schule wird vorrangig der einfache Fall „Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung" behandelt. Der Graph einer Funktion f mit Definitionsbereich ID nennen wir punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung genau dann, wenn für alle $x \in$ ID gilt:
$-x \in$ ID und $f(-x) = -f(x)$ (Wittmann & Padberg, 2007).

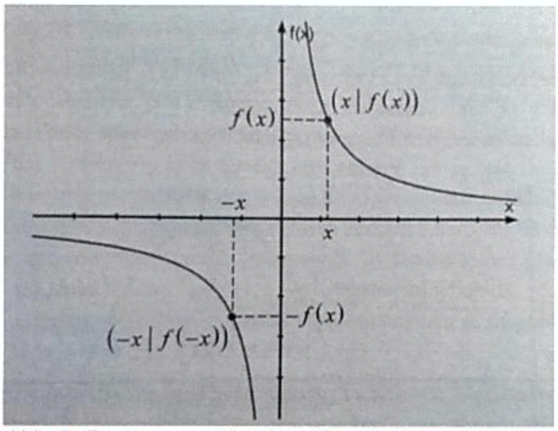


Abb. 5: Punktsymmetrie eines Funktionsgraphen zum Koordinatenursprung (Wittmann & Padberg, 2007)

<u>Beweis:</u> Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung genau dann, wenn für jeden Punkt $(x|f(x))$ auch der Punkt $(-x|f(-x))$ zum Graphen gehört. Dies ist gleichbedeutend mit $f(-x) = -f(x)$ für alle x ∈ ID (Wittmann & Padberg, 2007).

Beispiel: Gegeben sei die Funktion $g(x) = -2x^5 + 3x^3 + 2x$. Ist der Graph von g punktsymmetrisch?

$$g(-x) = -2(-x)^5 + 3(-x)^3 + 2(-x)$$
$$= 2x^5 - 3x^3 - 2x = -g(x)$$

Da $g(-x) = -g(x)$ gilt, ist der Graph von g punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Siehe Abb. 6 für den Graphen der Funktion g.

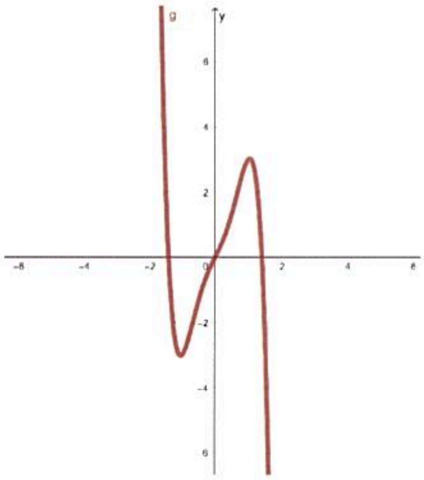


Abb. 6: Graph der Funktion g (Eigene Darstellung)

2. Unterrichtsvoraussetzungen

2.1 Lehrplanbezug

Der folgende Auszug ist aus dem bayerischen Lehrplan für das Gymnasium im Fach Mathematik in der 10. Jahrgangsstufe. Der Abschnitt befasst sich mit dem Vertiefen der Funktionenlehre.

> „Bisher haben die Schüler ganzrationale, einfache gebrochen-rationale und trigonometrische Funktionen sowie Exponentialfunktionen kennengelernt. Sie wiederholen Grundbegriffe und analysieren vertiefend verschiedene Eigenschaften ausgewählter Graphen. [...]

- Überblick über die bisher bekannten Funktionstypen
- Eigenschaften ausgewählter Graphen: gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie bezüglich y-Achse oder Ursprung (auch rechnerischer Nachweis)" (ISB Bayern, 2004)

2.2 Einbettung der Unterrichtssequenz

1. Doppelstunde	Einführung Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten ganzrationale Funktionen & Einführung Lösungsmethoden für algebraische Gleichungen höheren Grades (Polynomdivision, Substitution)
2. Einzelstunde	Vertiefung Lösungsmethoden für algebraische Gleichungen höheren Grades (Polynomdivision, Substitution)
3. Doppelstunde	Ganzrationale Funktionen und ihre Nullstellen
4. Einzelstunde	Übungs- und Wiederholungsstunde zu den vorherigen Themen
5. Doppelstunde	Ganzrationale Funktionen und ihr Verhalten für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ & Einführung des algebraischen Nachweises der Symmetrie von Funktionsgraphen
6. Einzelstunde	Übungs- und Wiederholungsstunde zur vorherigen Stunde inkl. Einführung der Begriffe „gerade" und „ungerade" ganzrationale Funktionen

Tab. 1: Unterrichtssequenz der 10. Jahrgangsstufe (eigene Darstellung)

Die ganze Unterrichtssequenz behandelt das Thema „ganzrationale Funktionen". Um ganzrationale Funktionen einzuführen, benötigt man als Grundlage die Potenzfunktionen, weshalb diese im ersten Teil der ersten Doppelstunde besprochen werden. Daraufhin werden Lösungsmethoden für algebraische Gleichungen höheren Grades aufgezeigt. Für lineare und quadratische Gleichungen sind schon Lösungsverfahren bekannt, deshalb liegt der Fokus auf Polynomdivision und Substitution. In der darauffolgenden Unterrichtseinheit werden beide Verfahren nochmal vertieft erklärt. In der dritten Doppelstunde werden ganzrationale Funktionen n-ten Grades erläutert. Die SchülerInnen sollen hierbei vor allem die allgemeine Form verstehen und außerdem k-fache Nullstellen und ihre Bedeutung für einen Vorzeichenwechsel am Graphen kennenlernen. In der nächsten Einzelstunde werden die vorherigen Themen geübt und gefestigt. Sollte dabei noch Bedarf zum Üben bestehen, kann diese Übungsphase noch verlängert werden. Die folgende Doppelstunde besteht wiederum aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird das Verhalten für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ bei ganzrationalen Funktionen behandelt und im zweiten Teil findet eine Einführung des algebraischen Nachweises der Symmetrie von Funktionsgraphen statt. Darauf aufbauend folgt eine Übungs- und Wiederholungsstunde inklusive der Einführung der Begriffe „gerade" und „ungerade" ganzrationale Funktionen.

2.3 Lernvoraussetzungen

Für diese Unterrichtsstunde sollten die SchülerInnen Funktionsgraphen optisch den zwei Symmetriearten Achsen- und Punktsymmetrie zuordnen können. Darüber hinaus wäre es vorteilhaft, wenn sie die speziellen Eigenschaften der Symmetriearten kennen und erklären können. Des Weiteren ist kein spezifisches Vorwissen mehr nötig.

3. Lernziele

Die SchülerInnen können die Symmetrie von Funktionsgraphen anhand des Funktionsterms algebraisch nachweisen.

- Die SchülerInnen können die Kriterien zur Bestimmung der Symmetrie herleiten.
- Die SchülerInnen können die Kriterien für den algebraischen Nachweis der Symmetrie anwenden.

4. Überarbeiteter Stundenverlaufsplan

Zeit	Stundenverlauf	Verwendete Medien/Materialien
Ca. 3 min	**Einstieg** L pinnt Blätter mit verschiedenen Funktionen (s. Anhang Abb. 7 – Abb. 15), die teilweise achsensymmetrisch, punktsymmetrisch oder nicht symmetrisch sind, an die Tafel. L: „Ordnet diese Funktionen den Begriffen Achsensymmetrie und Punktsymmetrie zu“ L ruft einzelne Schüler der Reihe nach auf, bis alle Funktionen zugeordnet sind. SchülerInnen gehen, nachdem sie aufgerufen wurden, nach vorne und hängen die Funktionen zu ihrer jeweiligen Symmetrieart. (siehe Anhang)	Blätter mit Funktionsgraphen/ Figuren Tafel
Ca. 3 min	**Problemstellung** L: „Ihr habt die Graphen jetzt nach dem Augenschein zugeordnet“ L zeigt zwei Ausschnitte einer Funktion $g(x) = -2x^5 + 9x^3 + x^2$. (Der eine Ausschnitt ist augenscheinlich achsensymmetrisch und der andere punktsymmetrisch) L lässt die Schüler beurteilen, ob und um welche Symmetrie es sich bei den Ausschnitten handelt. L zoomt nun weiter von der Funktion weg, so sieht man, dass sie weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch ist. (s. Anhang Abb. 16, Abb. 17, Abb. 18) L: „Wie ihr seht kann die Zuordnung nicht allein dem Augenschein nach erfolgen. Das muss mit anderen Mitteln geschehen. Rechnerisch kann man die Symmetrieart immer eindeutig bestimmen. Das ist das Thema der heutigen Stunde. Wir werden uns gleich Gleichungen	Tafel

	herleiten, mit denen man bestimmen kann, ob ein Graph achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.“	
Ca. 7 min	**Schülervermutungen** L: „Hat jemand eine Idee, wie man rechnerisch nachweisen kann, ob der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch ist? SchülerInnen: „Man setzt einen x-Wert in die Funktion ein (z.B. x = 2) und erhält einen Punkt des Graphen (A (2|-4)). Diesen zeichnet man in das KS ein. Dann setzt man die Gegenzahl ein (x = -2) erhält einen weiteren Punkt (A‘ (-2|-4)) und zeichnet diesen ebenfalls in das KS. Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.“ L: „Vorher haben wir ja gesagt, dass man das für die ganze Funktion und nicht nur auf einem Abschnitt überprüfen muss. Mit einzelnen Punkten überprüfen wir aber wieder nur auf einem Abschnitt der Funktion.“ SchülerInnen: „Dann muss man noch mehr Punkte prüfen“ L: „Was sagen denn die anderen dazu? Mögliche Schülerantworten: „Ja das geht“ „Ganz sicher kann man nie sein“ L: „Egal, wie viele Punkte man auf Symmetrie überprüft, man kann nicht 100% sicher sagen welche Symmetrie der Graph besitzt bzw. ob er überhaupt symmetrisch ist. Deswegen brauchen wir eine allgemeine Formel, um die gesamte Funktion zu untersuchen.	Tafel
Ca. 12 min	**Erarbeitung** L erarbeitet mit Einbezug der Klasse die Formel zur Überprüfung der Achsensymmetrie bzgl. der y-Achse. (s. Anhang Abb. 19)	Tafel

	L zeichnet zwei Punkte P und P' in ein Koordinatensystem, die achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse liegen. L: „Der Punkt P hat den x-Wert x_p. Welchen x-Wert muss dann P' haben? S: „$-x_p$" L: „Welche y-Werte haben dann P und P'? S: „P hat den y-Wert $f(x_p)$ und P' $f(-x_p)$" L:" In welchem Verhältnis müssen die beiden y-Werte stehen, sodass P und P' achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse liegen?" S: „$f(x_p) = f(-x_p)$" L erarbeitet mit Einbezug der Klasse die Formel zur Überprüfung der Punktsymmetrie bzgl. des Koordinatenursprungs. (s. Anhang Abb. 20) L zeichnet zwei Punkte P und P' in ein Koordinatensystem, die punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs liegen. L: „Der Punkt P hat den x-Wert x_p. Welchen x-Wert muss dann P' haben? S: „$-x_p$" L: „Welche y-Werte haben dann P und P'? S: „P hat den y-Wert $f(x_p)$ und P' $f(-x_p)$" L:" In welchem Verhältnis müssen die beiden y-Werte stehen, sodass P und P' achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse liegen?" S: „$-f(x_p) = f(-x_p)$"	
Ca. 10 min	**Sicherung durch Hefteintrag** <u>Symmetrie von Funktionen</u> Achsensymmetrie zur y-Achse: Der Graph einer Funktion f heißt achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle x ∈ ID gilt:	Tafel, Hefteintrag

	$f(-x) = f(x)$ Bsp.: $f(x) = x^2$ $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ $g(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2$ $g(-x) = 3(-x)^4 + 5(-x)^2 + 2 = 3x^4 + 5x^2 + 2 = g(x)$ Gegenbsp.: $h(x) = x^2 - x + 2$ $h(-x) = (-x)^2 - (-x) + 2 = x^2 + x + 2 \neq h(x)$ Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung: Der Graph einer Funktion f heißt punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn für alle x ∈ ID gilt: $f(-x) = -f(x)\ oder - f(-x) = f(x)$ Bsp.: $f(x) = x^3$ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ $g(x) = -2x^5 + 3x^3 + 2x$ $g(-x) = -2(-x)^5 + 3(-x)^3 + 2(-x) = 2x^5 - 3x^3 - 2x$ $= -g(x)$ Gegenbsp.: $h(x) = -3x^3 - x + 5$ $h(-x) = -3(-x)^3 - (-x) + 5 = 3x^3 + x + 5 \neq -h(x)$	
Ca. 10 min	**Übung** Die SchülerInnen lösen die Aufgaben im Buch S. 174/3 Teilaufgaben a), c), d), f), g), i), l) L geht in der Klasse umher und hilft einzelnen SchülerInnen. Die richtigen Lösungen werden danach kurz besprochen.	Buch EA

Tab. 2: Tabellarischer Unterrichtsverlaufsplan zum Thema „Einführung des algebraischen Nachweises der Symmetrie von Funktionsgraphen“ (Eigene Darstellung)

5. Reflexion

5.1 Persönlicher Eindruck

Meiner Meinung nach war es eine gelungene Unterrichtsstunde, aus der die SchülerInnen mit neuem Wissen herausgegangen sind. Generell war der rote Faden in der Stunde erkennbar, jedoch hätten die Übergänge in der Stunde etwas weicher und besser überlegt sein können. Beispielsweise war der Übergang vom Einstieg zu der Problemstellung etwas plötzlich und hätte noch besser ausgearbeitet werden können. Es wäre auch besser gewesen den Übergang von der Problemstellung zu den Schülervermutungen runder zu gestalten. Ansonsten konnte ich meiner Ansicht nach die SchülerInnen gut aktivieren und motivieren, sodass die Störungen sehr gering waren und die SchülerInnen sowohl die Erarbeitung, als auch die rechnerische Überprüfung verstanden haben und beherrschen.

Um den vorher bemängelten Übergang vom Einstieg zur Problemstellung besser zu gestalten, habe ich den Teil der Problemstellung überarbeitet. Dort wurde zuerst anhand von einem Funktionsterm deutlich gemacht, dass man nicht immer sofort sehen kann, welche Symmetrieeigenschaft der zugehörige Graph besitzt. In der überarbeiteten Version werden zwei Ausschnitte eines Funktionsgraphen gezeigt, die augenscheinlich achsen- bzw. punktsymmetrisch sind. Sieht man sich aber den ganzen Funktionsgraphen an, sieht man, dass er keine Symmetrieeigenschaft besitzt. Dies soll zur größeren Motivation beitragen den algebraischen Nachweis zu erlernen. Der Übergang ist dahingehend verbessert, da nun sowohl im Einstieg als auch in der Problemstellung das Beurteilen anhand der Funktionsgraphen im Vordergrund steht. In der alten Version waren Einstieg und Problemstellung nicht so gut miteinander verknüpft. Außerdem wird im überarbeiteten Stundenentwurf die Erarbeitung besser und genauer aufgeführt. Dies erleichtert die Erarbeitung im Unterricht wesentlich.

5.2 Spezialaufträge der Kommilitonen

Nachfolgend sind die Spezialaufträge der Kommilitonen zur gehaltenen Stunde zusammengefasst und verschriftlicht.

Generell habe ich schülergerechte *Fachsprache* verwendet. Allerdings hätte ich mehr darauf achten können, dass sich auch die SchülerInnen fachlich korrekter ausdrücken. Beispielsweise hätte ich einen Schüler korrigieren müssen, als er nach der algebraischen Überprüfung einer Funktion sagte, dass die Funktion achsensymmetrisch sei, denn fachlich korrekt wäre „achsensymmetrisch zur y-Achse" gewesen. Außerdem habe ich vergessen, die Achsen der Koordinatensysteme zur Erarbeitung der Gleichungen zu beschriften. Des Öfteren benutzte ich das Füllwort „genau". Dies sollte ich in Zukunft vermeiden.

Gleich zu Beginn der Stunde hätte ich meinen *Arbeitsauftrag* „Ordnet die Funktionsgraphen den Symmetriearten zu" klarer formulieren können. Es war nämlich nicht klar, ob nun alle SchülerInnen auf einmal vorkommen sollen oder nur einzeln, um die Funktionsgraphen zuzuordnen. Bei der Erarbeitung der Formeln zur Überprüfung der Symmetrie habe ich mehrere Farben benutzt, was einerseits zum besseren Verständnis beigetragen hat, jedoch hätten die Farben noch besser eingesetzt werden können. Außerdem ging der Übergang von Punkten zu einem Graphen etwas schnell. Ich hätte nochmal erwähnen sollen, dass die Formel nicht für einzelne Punkte gedacht ist, sondern für alle Punkte gelten muss. Als es zum Hefteintrag kam, habe ich angewiesen, dass die SchülerInnen nun mitschreiben sollen. Das wiederum hat für Verwirrung gesorgt, da die meisten SchülerInnen schon bei der Erarbeitung mitgeschrieben haben. Gut war, dass ich im Hefteintrag sowohl Beispiele als auch Gegenbeispiele verwendet habe.

Kurz nach Stundenbeginn herrschte große Aufregung, da ein Käfer zu den Mädchen geflogen ist. Darauf habe ich aber souverän reagiert und so konnte der Unterricht schnell fortgesetzt werden. Insgesamt gab es ein paar kleinere Unterhaltungen während der mündlichen Phase, die aber keine besondere *Störung* darstellten. Erst als mich einer der Schüler etwas gefragt hat und ich daraufhin nur mit ihm ein Gespräch geführt habe, wurde es unruhiger. Besser wäre es gewesen bei der Frage die gesamte Klasse mit einzubeziehen, um so Unruhe zu vermeiden. Gegen Ende wurde es auch nochmal ein bisschen lauter, da es zu dieser Zeit sehr viele Beispiele waren und so etwas Langeweile aufkam.

Gleich zu Beginn der Stunde fand eine *Aktivierung* der SchülerInnen statt, indem ich sie aufgefordert habe die Funktionsgraphen den Symmetriearten zuzuordnen. Durch gezielte Fragen konnte ich die SchülerInnen gut motivieren an der Stunde teilzuhaben. Allerdings habe ich unterbewusst etwas mehr Jungen aufgerufen, um meine Fragen zu beantworten. Insgesamt war eine große Beteiligung am Unterricht auf Seiten der SchülerInnen zu verzeichnen.

6. Anhang

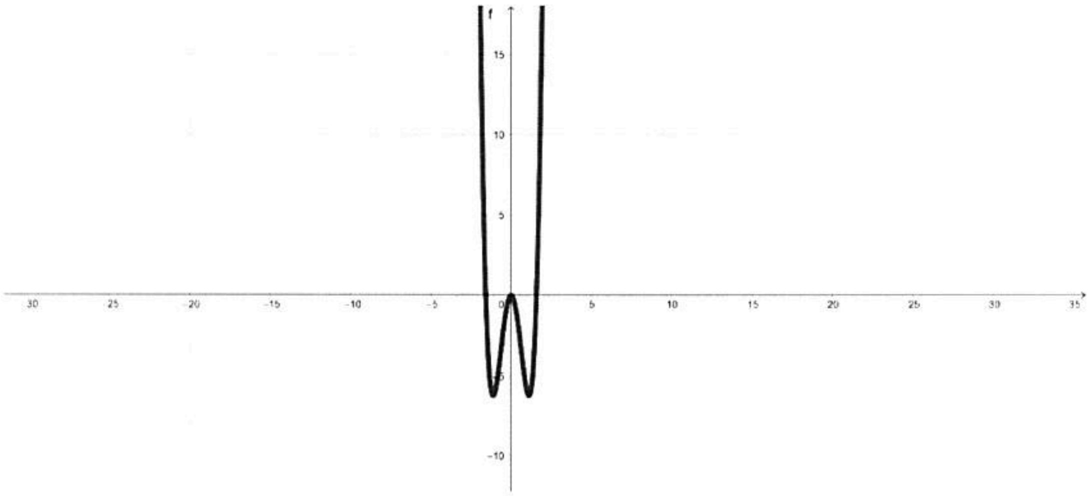


Abb. 7: Einstieg - Polynom 1 (Eigene Darstellung)

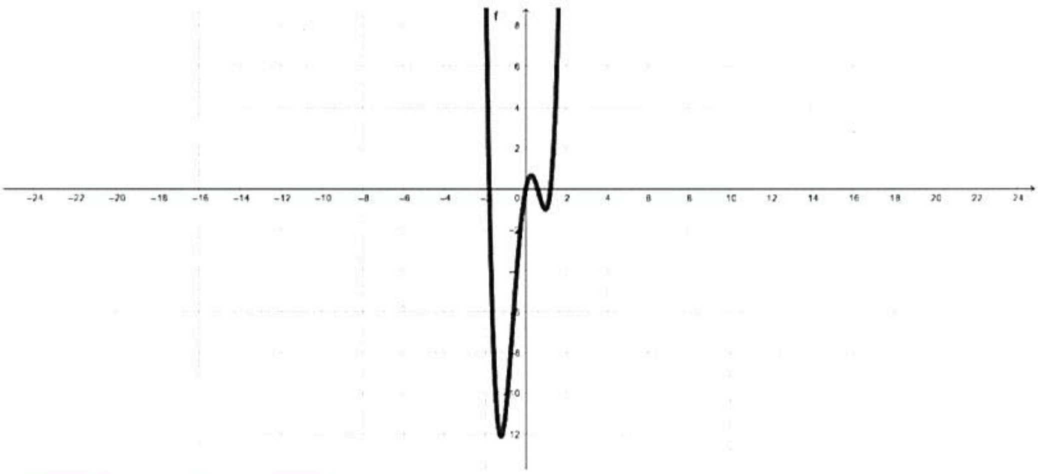


Abb. 8: Einstieg - Polynom 2 (Eigene Darstellung)

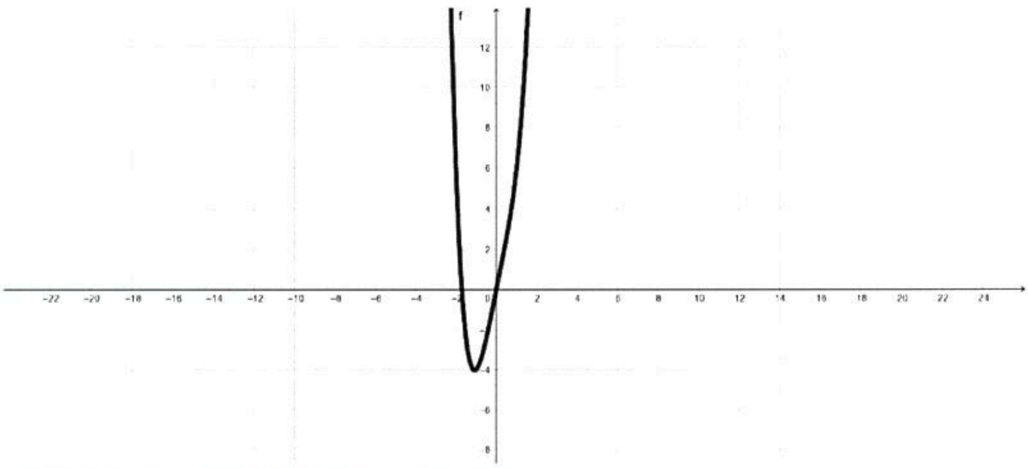


Abb. 9: Einstieg - Polynom 3 (Eigene Darstellung)

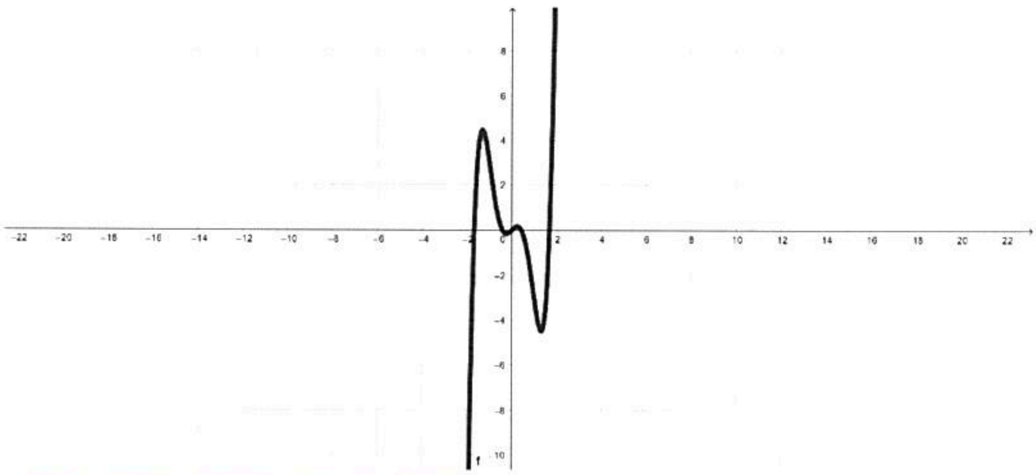


Abb. 10: Einstieg - Polynom 4 (Eigene Darstellung)

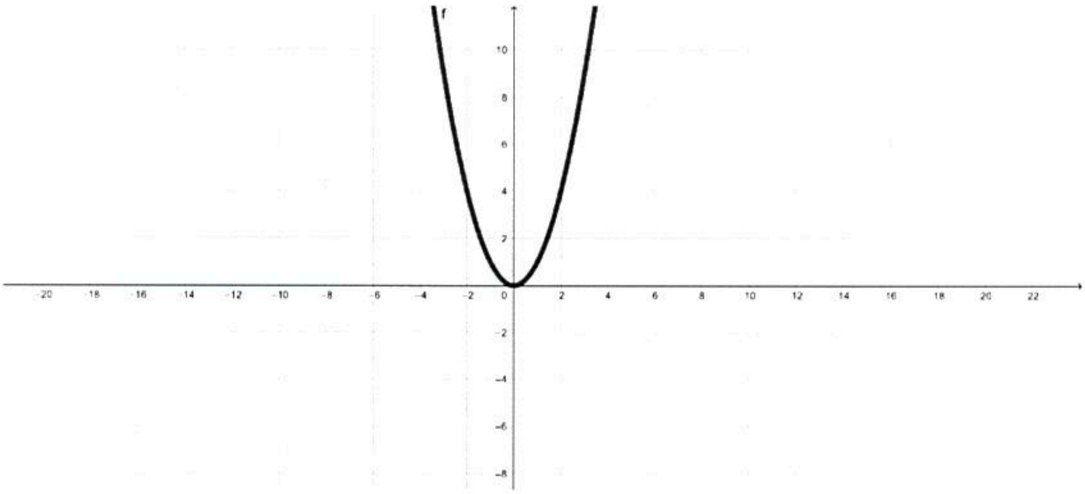


Abb. 11: Einstieg - Polynom 5 (Eigene Darstellung)

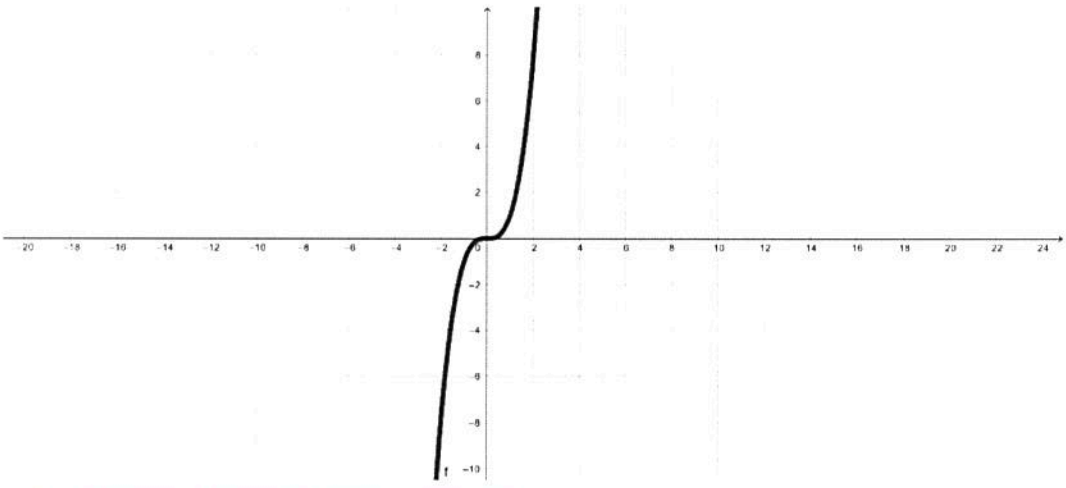


Abb. 12: Einstieg - Polynom 6(Eigene Darstellung)

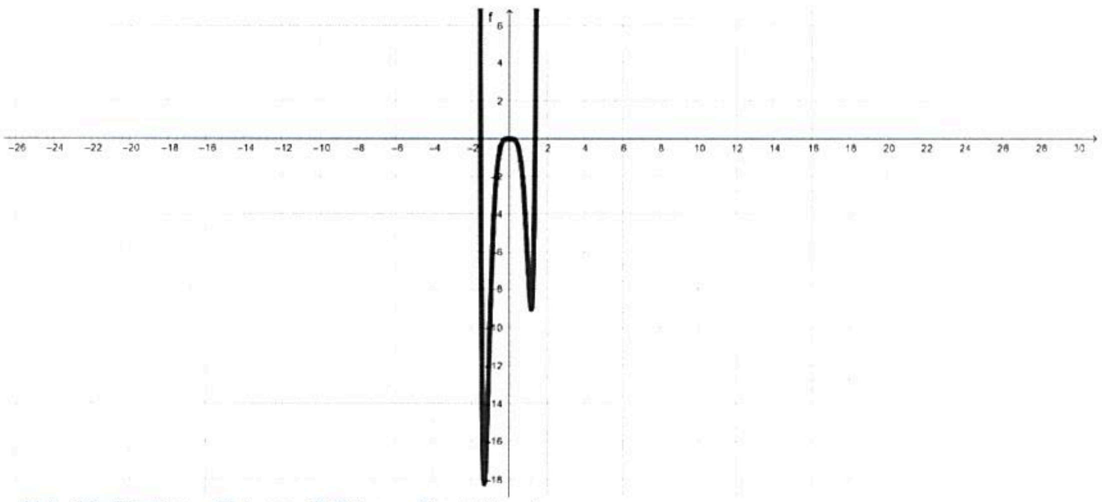


Abb. 13: Einstieg - Polynom 7 (Eigene Darstellung)

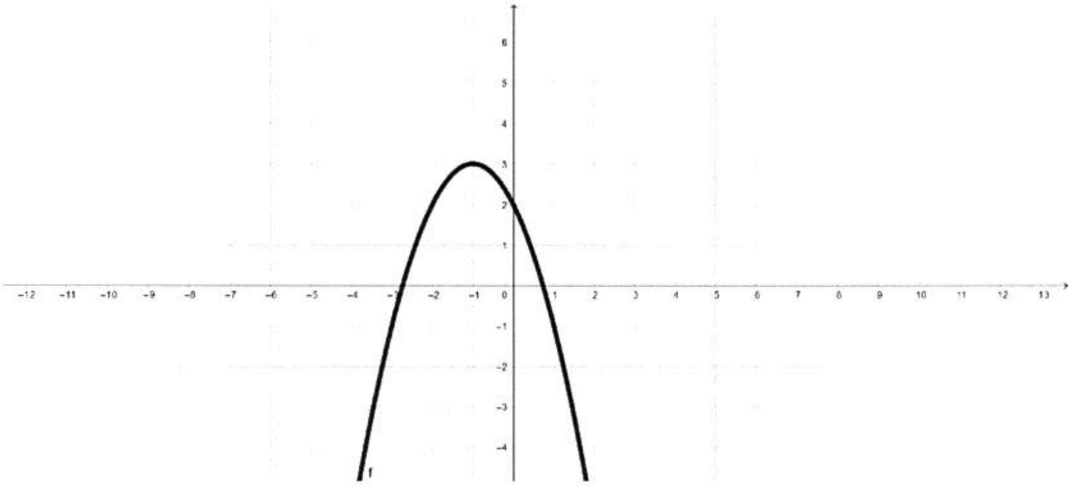


Abb. 14: Einstieg - Polynom 8 (Eigene Darstellung)

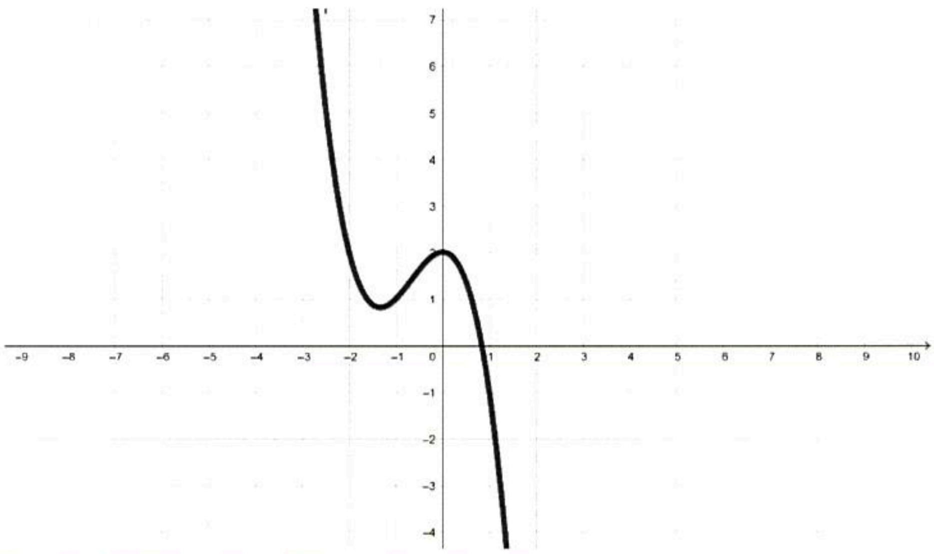


Abb. 15: Einstieg - Polynom 9 (Eigene Darstellung)

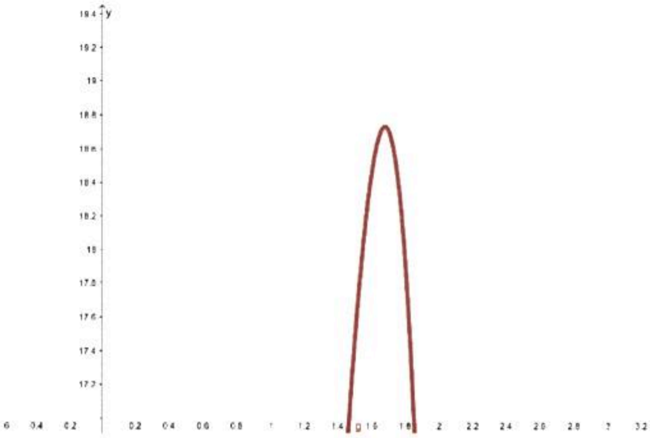


Abb. 15: Problemstellung - Ausschnitt 1 (Eigene Darstellung)

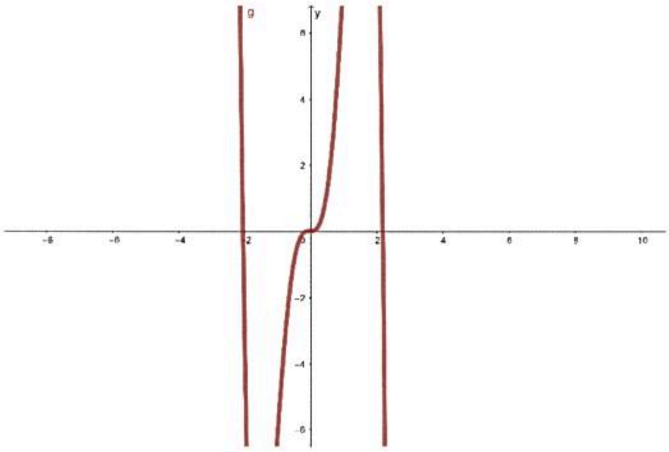


Abb. 17: Problemstellung - Ausschnitt 2 (Eigene Darstellung)

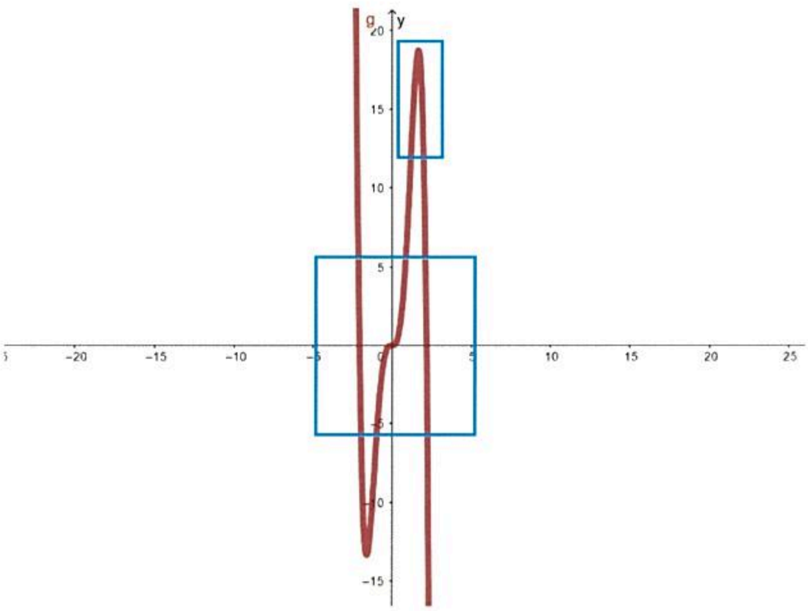


Abb. 18: Problemstellung - ganze Funktion (Eigene Darstellung)

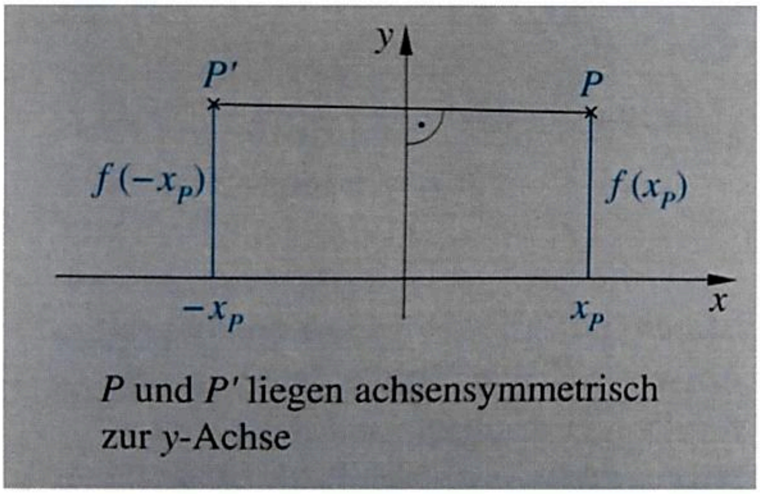


Abb. 19: Erarbeitung - Achsensymmetrie bzgl. y-Achse (Brunnermeier, Freytag & Wagner, 2011)

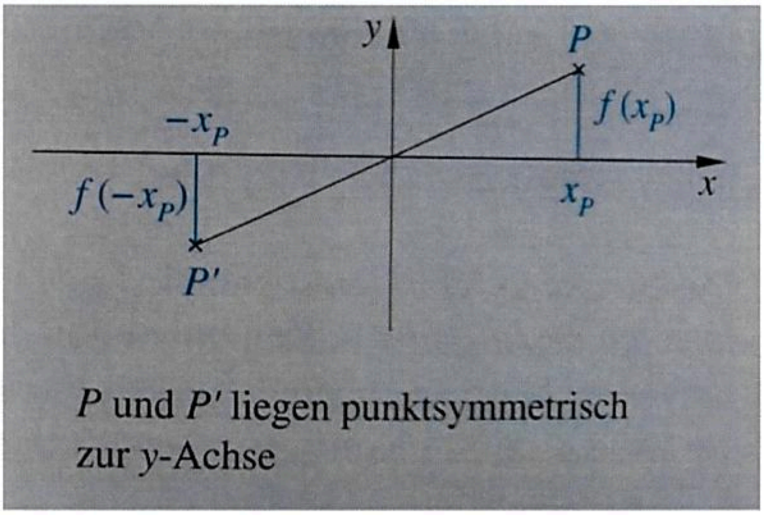


Abb. 20: Erarbeitung - Punktsymmetrie bzgl. Koordinatenursprung (Brunnermeier, Freytag & Wagner, 2011)

II. Unterrichtsversuch 2: 11. Klasse – Einführung der Modellierung von Sachsituationen mithilfe von ganzrationalen Funktionen

1. Sachstruktur

<u>Modellbildung als Kreislauf</u>

Die folgende Abbildung zeigt die Modellbildung als Kreislauf.

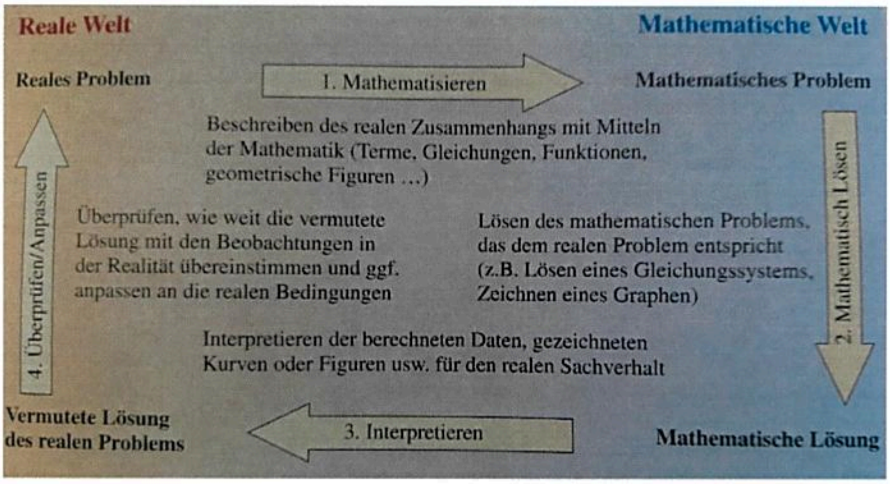


Abb. 21: Modellbildung als Kreislauf (Brunnermeier & Wagner, 2009)

In der realen Welt besteht ein reales Problem, welches, um es zu lösen, in die mathematische Welt übertragen wird. Nun muss das entstandene mathematische Problem gelöst werden. Diese mathematische Lösung wird dann so interpretiert, dass eine vermutete Lösung des realen Problems entsteht. Diese Lösung muss nun überprüft bzw. angepasst werden.

Dieser Kreislauf liegt der Vorgehensweise beim Modellieren mit Funktionen zugrunde.

<u>Modellieren mit Funktionen</u>

In Anwendungssituationen stellt sich häufig das Problem, Funktionen zu finden, die bestimmte Bedingungen erfüllen, z.B. an bestimmten Stellen gegebene Werte annehmen oder gegebene Steigungen aufweisen. Oft ist es dabei möglich, ganzrationale Funktionen zu verwenden.

Aber nicht immer sind derartige Funktionen zur Beschreibung von Kurven mit vorgegebenen Bedingungen geeignet. Die unten beschriebene Methode kann im Prinzip auch zur Bestimmung von gebrochen-rationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen herangezogen werden. Häufig werden dabei die auftretenden rechnerischen Probleme größer und eventuell nur noch Näherungslösungen ermittelbar.

Beim Modellieren eines Sachverhalts mithilfe von Funktionen kann ein Vorgehen in folgenden Schritten hilfreich sein:

1. Mathematische Beschreibung der Situation und ggf. Wahl eines geeigneten Koordinatensystems (wenn möglich Ausnutzung von Symmetrien).
2. Formulierung der vorgegebenen Bedingungen (vorgegebene Punkte, Steigungen, oder Extremstellen), die an die gesuchte Funktion zu stellen sind.
3. Wahl eines geeigneten Funktionstyps mit noch zu bestimmenden Parametern. Bei ganzrationalen Funktionen entscheidet die Anzahl der Bedingungen über den Grad: Durch ein Polynom $(n-1)$-ten Grades können n Bedingungen erfüllt werden. Besteht eine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems, so weist der Funktionsterm nur gerade oder nur ungerade Exponenten auf. Hier ist der Grad dann ebenfalls entsprechend der Zahl der zu erfüllenden Bedingungen zu wählen.
4. Durch die Bedingungen an die ganzrationale Funktion erhält man ein Gleichungssystem für die Koeffizienten der Funktion. Durch Lösen des Gleichungssystems bestimmt man die Paramater der Funktion.
5. Überprüfen, ob der Graph die gewünschten Eigenschaften aufweist. Die Graphen von ganzrationalen Funktionen höheren Grades können – neben den geforderten – unerwünschte Extremstellen enthalten. Es ist daher notwendig zu überprüfen, ob der Graph der ermittelten Funktion tatsächlich wie gewünscht verläuft (Brunnermeier & Wagner, 2009).

2. Unterrichtsvoraussetzungen

2.1 Lehrplanbezug

Der folgende Auszug ist aus dem bayerischen Lehrplan für das Gymnasium im Fach Mathematik in der 11. Jahrgangsstufe. Der Abschnitt befasst sich mit der Anwendung der Differentialrechnung, zu dem die Modellierung von Sachsituationen mithilfe von ganzrationalen Funktionen gehört.

> „Beispielsweise bei Fragen der Optimierung setzen die Schüler ihre neu erworbenen Kenntnisse über Funktionen und deren Ableitung ein. Die Interpretation der Ableitung

als Änderungsverhalten der Funktion bzw. als Tangentensteigung des zugehörigen Graphen wird dabei den Jugendlichen erneut bewusst. Sie vertiefen die erlernten Techniken, indem sie diese auch auf einfache Funktionen mit Parametern anwenden und Funktionsterme mit vorgegebenen Eigenschaften bestimmen. Die Schüler erkennen, dass insbesondere bei praktischen Anwendungen verschiedenster Funktionen die berechneten Ergebnisse stets interpretiert und auf ihre Sinnhaftigkeit überprüft werden müssen, etwa im Zusammenhang mit Randextrema oder Parametern.

- Extremwertprobleme
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen (ISB Bayern, 2004)“

2.2 Einbettung in die Unterrichtssequenz

1. Doppelstunde	Einführung der Modellierung von Sachsituationen mithilfe von ganzrationalen Funktionen
2. Doppelstunde	Modellierung von Sachsituationen mithilfe von allen Funktionstypen
3. Doppelstunde	Einführung von Extremwertproblemen
4. Doppelstunde	Komplexere Extremwertprobleme

Tab. 3: Unterrichtssequenz der 11. Jahrgangsstufe (Eigene Darstellung)

Funktionsbestimmungen und Extremwertaufgaben gehören zum Bereich der Anwendung der Differentialrechnung. Die Anwendung der Differentialrechnung bildet eine Unterrichtssequenz, in der die konzipierte Stunde den ersten Teil der ersten Doppelstunde darstellt. Die erste Doppelstunde soll als Einführung in die Modellierung von Sachsituationen dienen. In dieser Stunde werden Sachsituationen nur mithilfe von ganzrationalen Funktionen modelliert. Auch die Bedingungen, die von der jeweiligen Sachsituation ausgehen, sind möglichst einfach gehalten. Um die Sachsituation zu modellieren, wird lediglich mit Werten und Steigungen, die die ganzrationale Funktion annehmen muss, gearbeitet. In der zweiten Doppelstunde der Sequenz soll, auf die erste Stunde aufbauend, komplexere Sachsituationen modelliert werden. Hierzu können alle bekannten Funktionstypen als Grundgerüst dienen. Auch die Bedingungen werden vielseitiger. Beispielsweise können die Lage der Funktion zu einer anderen Funktion oder Symmetrieeigenschaften in der Sachsituation verlangt werden. In der dritten Doppelstunde werden Extremwertprobleme, die ein weiterer Teil der Anwendung der Differentialrechnung sind, eingeführt. Auch hier wird mit leichteren

Aufgaben begonnen, die dann in der vierten Doppelstunde komplexer und vielschichtiger werden.

2.3 Lernvoraussetzungen

Die SchülerInnen sollten zu Beginn der Stunde Gleichungssysteme aufstellen und diese lösen können. Am besten mit mehreren möglichen Verfahren, sodass immer der schnellste und einfachste Weg genommen werden kann. Die SchülerInnen sollten deshalb auch erkennen können, welches Verfahren das effektivere ist. Außerdem müssen die SchülerInnen den Zusammenhang von Ableitung und Steigung kennen, um so eine Bedingung formulieren zu können. Der Funktionstyp „ganzrationale Funktionen" und die damit verbundenen Eigenschaften der Funktion ist eine wichtige Grundlage für diese Unterrichtsstunde. Dabei sollte vor allem auch die allgemeine Form von ganzrationalen Funktionen bekannt sein. Des Weiteren müssen die SchülerInnen in der Lage sein, ganzrationale Funktionen, insbesondere die allgemeine Form, abzuleiten.

3. Lernziele

Die SchülerInnen können eine Sachsituation mithilfe von ganzrationalen Funktionen modellieren.

- Die SchülerInnen wissen, wie viele Bedingungen nötig sind, um eine ganzrationale Funktion n-ten Grades zu modellieren.
- Die SchülerInnen können, anhand einer vorgegebenen Situation, Bedingungen formulieren, die die zu modellierende ganzrationale Funktion erfüllen muss.
- Die SchülerInnen können diese Bedingungen in ein Gleichungssystem übertragen.

4. Überarbeiteter Stundenverlaufsplan

Zeit	**Stundenverlauf**	**Verwendete Medien/Materialien**
Ca. 8 min	**Einstieg: Wiederholung aus der 9. Jgst.:** **Aufgabe 234/1:** (s. Anhang Abb. 22)	Tafel, Vorbereitete Lösung

	L:"Wie würdet ihr bei dieser Aufgabe vorgehen?" S: „Funktion 2. Grades (Parabel): $f(x) = ax^2 + bx + c$" L: „Wie kann man nun die Bedingungen der Aufgabe so formulieren, sodass man daraus ein Gleichungssystem erstellen kann?" S: - $f(0) = 0$ - $f'(0) = 0$ - $f'(2) = 6$ L: „Was muss bei den zwei letzten Bedingungen beachtet werden?" S: „Punkte werden in die Ableitung eingesetzt: $f'(x) = 2ax + b$" L lässt S in Stillarbeit das Gleichungssystem aufstellen und lösen. L legt die Lösung unter die Dokumentenkamera und spricht sie kurz durch. ➔ $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ L: „Jetzt muss noch rechnerisch überprüft werden, ob die f die gewünschten Eigenschaften besitzt. Dazu setzt ihr bitte die drei Bedingungen ein und schaut, ob das Richtige rauskommt." L wiederholt kurz die Vorgehensweise bei ganzrationalen Funktionen 2. Grades.	
Ca. 15 min	**Diskussion** L: „Wie viele Bedingungen sind denn notwendig, um eine eindeutige Funktion 2. Grades aufzustellen? S: „3" L: „Wir wollen jetzt aber nicht nur Sachsituationen mit Funktionen 2. Grades modellieren, sondern auch mit ganzrationalen Funktionen höheren Grades."	Overhead, Folien mit Strecken aus der Angabe und passendem Koordinatensystem, Tafel

	„Wie viele Bedingungen sind denn notwendig, wenn ich eindeutige ganzrationale Funktionen 3. Grades aufstellen möchte?" S: „4" L: „Also immer eine Bedingung mehr als der Grad der Funktion." L: „Es ist aber nicht immer so, dass die Bedingungen schon gegeben sind oder man genau weiß, welchen Grad die ganzrationale Funktion hat, die man braucht, um eine Sachsituation zu modellieren." L legt die beiden Strecken von Aufgabe 237/24 (s. Anhang Abb. 23) auf den Overhead. (s. Anhang Abb. 24) L: „Wir möchten nun eine ganzrationale Funktion finden, um die beiden Strecken knickstellenfrei zu verbinden." L: „Wer kann mir denn einen Graphen auf die Folie zeichnen, die die beiden Strecken knickstellenfrei verbindet." S zeichnet Graphen (Parabel) ein. L: „Wie würdet ihr denn jetzt anfangen diese Sachsituation zu modellieren?" S: „Ganzrationale Funktion 2. Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$" L: „Wie viele Bedingungen muss diese Funktion erfüllen?" S: „Drei Bedingungen, da Grad 2" L: „Wie bekomm ich die Bedingungen, die der Graph erfüllen muss?" S: „KOS einzeichnen und ablesen" L legt ein KOS auf die Folie, sodass Punkt B im Ursprung liegt (s. Anhang Abb. 26). S: Dann erhalte ich folgende vier Bedingungen: - $f(0) = 0$	

	- $f(3) = -\frac{1}{2}$ - $f'(0) = \frac{1}{3}$ - $f'(3) = -\frac{1}{2}$ L stellt aus diesen Informationen ein Gleichungssystem auf und lässt die Schüler anfangen, dieses Gleichungssystem zu lösen. Dabei kommt es entweder am Ende zu einem Wiederspruch beim Lösen, da a zwei Werte annimmt oder den Schülern fällt vorher auf, dass sie eine Bedingung zu viel haben, um diese Sachsituation mit einem Polynom 2. Grades zu modellieren. L: „Wie können wir das Problem lösen? Was haben wir grad über den Zusammenhang von der Anzahl der Bedingungen und dem Grad der Funktion gesagt?“ S: „Es muss eine ganzrationale Funktion 3. Grades sein.“ L: „Genau. Löst nun die Aufgabe mit einer ganzrationalen Funktion 3. Grades.	
Ca. 15 min	Aufgabe 237/24 wird fortgesetzt: S lösen die Aufgabe in Stillarbeit. L legt seine Lösung unter die Dokumentenkamera und spricht sie mit den Schülern durch und legt den Graphen der Lösungsfunktion (s. Anhang Abb. 25) über das Koordinatensystem und die zwei Strecken aus der Angabe. L lässt Schüler kurz rechnerisch überprüfen, ob erhaltene Funktion die Bedingungen erfüllt.	Overhead, Folie mit der Lösungsfunktion, Doku-Kamera
Ca. 7 min	**Sicherung durch Arbeitsblatt:** L wiederholt zusammen mit den Schülern die Vorgehensweise beim Modellieren von Funktionen. L: „Was war der erste Schritt, den wir bei der Aufgabe vorher gemacht haben?“	Doku-Kamera, AB

	S: „Die Situation beschrieben und ein Koordinatensystem gewählt.“ L deckt den ersten Schritt der Anleitung unter der Doku-Kamera auf. L erfragt auch die folgenden Schritte der Vorgehensweise. L teilt AB mit der Anleitung aus. Arbeitsblatt: (s. Anhang Abb. 27)	

Tab. 4: Tabellarischer Unterrichtsverlaufsplan zum Thema "Einführung der Modellierung von Sachsituationen mithilfe von ganzrationalen Funktionen" (Eigene Darstellung)

5. Reflexion

5.1 Persönlicher Eindruck

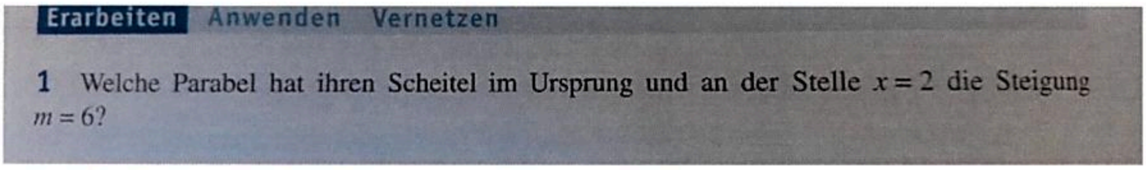
Es war meiner Meinung nach eine sehr gelungene Stunde, bei der der rote Faden zu jederzeit erkennbar war. Die SchülerInnen waren weder unterfordert, noch überfordert, was sich daran bemerkbar gemacht hat, dass es die ganze Stunde über nur sehr wenige Störungen gab. Besondere Schülerfragen habe ich souverän beantwortet und erklärt, sodass die ganze Klasse daran beteiligt war und jeder die Antwort mitbekommen hat. In den Phasen der Einzelarbeit bin ich durch die Reihen gelaufen und konnte einigen Schülern helfen bzw. einen Denkanstoß geben. Einen Schüler, der allgemein sehr wenig mitarbeitet und bei der Einzelarbeit nicht mitgemacht hat, konnte ich, nach mehrmaligem Auffordern und Erklären der Aufgabe, dazu bewegen am Unterricht teilzuhaben. Allerdings würde ich das Koordinatensystem in Zukunft selbst anlegen, um viel Rechenarbeit, wegen ungünstig gewählter Punkte, zu vermeiden. Allerdings beim Anlegen erwähnen, wieso ich das so gewählt habe. In der Stunde habe ich das Koordinatensystem nochmal anders angelegt. Hätte ich das gleich so gemacht, hätte ich mir ein bisschen Zeit gespart.

Im Stundenentwurf wurden lediglich zwei Stellen bearbeitet. Zum einen wurde, wie vorher schon beschrieben und aufgrund der vorher genannten Punkte, die Stelle angepasst, bei der das Koordinatensystem nun von der Lehrkraft aufgelegt wird. Zum anderen werden die vier Bedingungen im Abschnitt „Diskussion“ mithilfe der Lehrkraft hergeleitet, da sonst die Gefahr bestand, dass die Schülerinnen nur drei Bedingungen finden und so kein Widerspruch zustande kommt. Die SchülerInnen würden dann eine falsche Funktion und nicht den Wiederspruch herausbekommen. Dies würde zwar auch zeigen, wie wichtig der vorher gewählte Grad der Funktion ist, aber wesentlich mehr Zeit kosten, da das Gleichungssystem vollkommen gelöst wird und danach erst noch gezeigt werden muss, wieso diese Lösung falsch ist.

5.2 Spezialaufträge der Kommilitonen

Grundsätzlich überschneiden sich meine Wahrnehmung der Stunde mit der der Kommilitonen, weshalb hier nicht mehr genauer auf alle Punkte eingegangen wird. Allerdings haben sie meine „Lehr-Performance“ noch besser bewertet als ich sie eingeschätzt habe. Besonders hervorgehoben haben sie, dass ich in der Stillarbeit herumgegangen bin und keine „Scheu“ hatte zu helfen und die SchülerInnen direkt anzusprechen, wenn ich ihnen angesehen habe, dass sie bei etwas Probleme haben. Auf eine Schülerfrage habe ich, nach Meinung der betreuenden Lehrerin, besonders souverän und gut geantwortet. Dieser Schüler ist anscheinend bekannt für „ungewöhnliche“ und „komisch“ formulierte Fragen. Er fragte mich, „wieso man den Grad einer Funktion immer um eins niedriger wählen muss, als die Anzahl der Bedingungen, die in der Sachsituation verlangt wird, da ja eine Funktion 2. Grades auch vier Bedingungen und sogar noch mehr erfüllt.“ Diese Frage habe ich vor der ganzen Klasse nochmal wiederholen lassen und an der Tafel, mithilfe einer Skizze, erklärt.

6. Anhang



Erarbeiten Anwenden Vernetzen

1 Welche Parabel hat ihren Scheitel im Ursprung und an der Stelle $x = 2$ die Steigung $m = 6$?

Abb. 22: Einstiegsaufgabe 234/1 (Brunnermeier & Wagner, 2009)

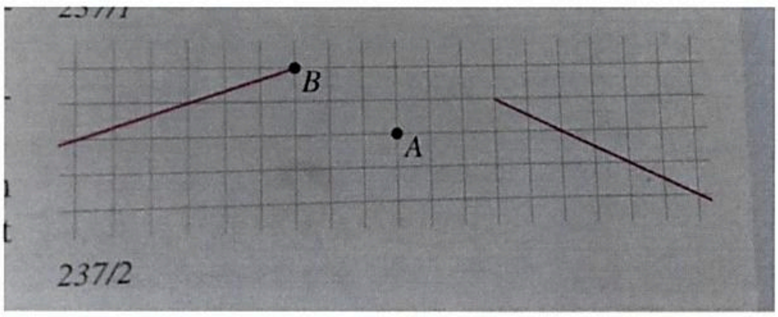


Abb. 23: Aufgabe 237/24 (Brunnermeier & Wagner, 2009)

Abb. 247: Overhead-Folie - Strecken zu Aufgabe 237/24 (Eigene Darstellung)

Abb. 25: Overhead-Folie - Lösungsgraph zu Aufgabe 237/24 (Eigene Darstellung)

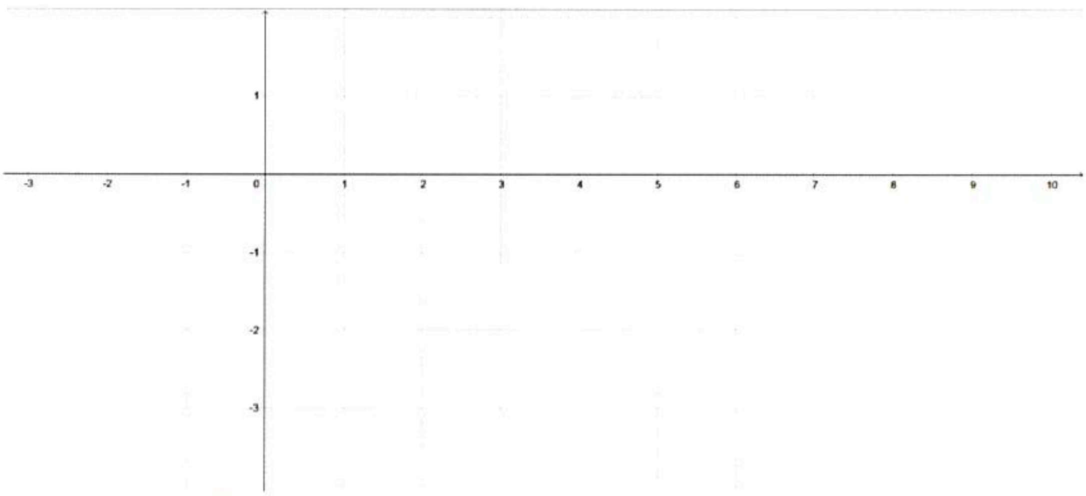


Abb. 266: Overhead-Folie - Koordinatensystem zu Aufgabe 237/24 (Eigene Darstellung)

Modellierung von Funktionen

Vorgehensweise:

1. Mathematische Beschreibung der Situation, ggf. Wahl eines geeigneten Koordinatensystems
2. Formulierung von Bedingungen
3. Wahl eines geeigneten Funktionstyps (mit noch zu bestimmenden Parametern)
➔ Ganzrationale Funktionen: Grad um eins kleiner als die Anzahl der Bedingungen
4. Aufstellen eines Gleichungssystems anhand der Bedingungen
5. Lösen des Gleichungssystems zur Bestimmung der Parameter
6. Parameter in Funktionstyp einsetzen
7. Überprüfen, ob der Graph die Eigenschaften aufweist.

Abb. 278: Arbeitsblatt zur Modellierung (Eigene Darstellung)

III. Literatur

Brunnermeier, A., Freytag, C. & Wagner, I. (2011). *Fokus Mathematik. Jahrgangsstufe 10.* Berlin: Cornelsen.

Brunnermeier, A. & Wagner, I. (2009). *Fokus Mathematik. 11 Gymnasium Bayern.* Berlin: Cornelsen.

ISB (2004). *Lehrplan Gymnasium. Jahrgangsstufen-Lehrplan. Jahrgangsstufe 10.* Mathematik. München: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. Zugriff am 10. Oktober 2019 unter http://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26221.html

ISB (2004). *Lehrplan Gymnasium. Jahrgangsstufen-Lehrplan. Jahrgangsstufe 11/12.* Mathematik. München: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. Zugriff am 10. Oktober 2019 unter http://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26192.html

Wittmann, G., & Padberg, F. (2007). *Elementare Funktionen und ihre Anwendungen.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.